

Exercices du samedi

Les exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles a priori.

Exercice 1 (*).

- On dit qu'un entier $k \in \mathbb{Z}$ est représentable si $\exists(a, b) \in \mathbb{Z}^2, k = a^2 + b^2$.
Montrer que le produit de deux entiers représentables est représentable.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme positif. Montrer que

$$\exists A, B \in \mathbb{R}[X] \quad P = A^2 + B^2.$$

Exercice 2 (Moyenne arithmético-géométrique). Soient $a, b > 0$. On définit les suites (a_n) et (b_n) par $(a_0, b_0) = (a, b)$ et $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right)$.

Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite, appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b .

Exercice 3. Soit u une suite telle que (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que u converge.

Exercice 4 (Méthode des rectangles). Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

- Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange, sans oublier leurs hypothèses.
- Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(a) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

- En déduire que pour tout n :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

puis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f.$$

Interpréter géométriquement.

- Montrer de même que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1) \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f.$$

Exercice 5 (Méthode du point milieu). Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$.

- Montrer que :

$$\int_a^b f - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_a^b \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) dx.$$

puis que

$$\left| \int_a^b f - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \max_{[a, b]} |f''|$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{[a, b]} |f''|$$

$$\text{puis que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f.$$

On dit que la méthode du point milieu est d'ordre deux.

Exercice 6 (Lemme de Riemann-Lebesgue et variante, *).

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Déterminer les limites suivantes :

-

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx$$

-

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx$$

Indication : on pourra penser aux fonctions en escalier.

Exercice 7 (*). Dans cet exercice, on pourra librement utiliser les résultats de l'exercice 21 du TD ordinaire dont on reprend les notations.

- Déduire de l'identité $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, l'identité $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$.

2. En déduire $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \varphi(k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\pi^2}$.
3. On note p_n la probabilité que deux entiers tirés uniformément et indépendamment entre 1 et n soient premiers entre eux. Déterminer la limite de (p_n) .

Exercice 8.

1. Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.
2. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble de ses points de non-dérivabilité est au plus dénombrable.

Exercice 9 (Méthode de l'hyperbole, *). Pour tout n , on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n . En utilisant l'hyperbole d'équation $xy = n$, donner un équivalent de

$$\sum_{k=1}^n d(k).$$

Bonus : donner un développement asymptotique à $O(\sqrt{n})$ près.