

## Feuille d'exercices n   2

## 5. CONVEXITÉ

**Exercice 25** (Inégalité arithmético-géométrique). Montrer que

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

**Exercice 26** (Autre preuve de l'inégalité de Jensen).

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. On appelle sous-dérivée de  $f$  en  $a$  tout réel  $s$  tel que  $\forall x \in I, f(x) \geq f(a) + s(x - a)$ , et sous-différentiel de  $f$  en  $a$ , noté  $\partial f(a)$  l'ensemble de toutes les sous-dérivées de  $f$  en  $a$ .

1. Montrer que pour tout  $a \in \overset{\circ}{I}$ ,  $\partial f(a) \neq \emptyset$ . Faire un dessin.
2. Soit  $(\lambda_i)$  une famille finie de réels positifs sommant    1. Soient  $(x_i)$  des réels de  $I$  et  $\bar{x} = \sum \lambda_i x_i$ . Montrer que

$$f(\bar{x}) \leq \overline{f(x)} := \sum \lambda_i f(x_i).$$

**Exercice 27** (Ultra classique !). On fixe des réels  $p, q > 1$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

1. Inégalité de Young : Soient  $x, y \geq 0$ . Montrer que  $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ .
2. Inégalité de Hölder : Soient  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0$ . Montrer que

$$\sum x_i y_i \leq \left( \sum x_i^p \right)^{1/p} \left( \sum y_i^q \right)^{1/q}.$$

3. Inégalité de Minkowski : Montrer que

$$\left( \sum (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum x_i^p \right)^{1/p} + \left( \sum y_i^p \right)^{1/p}.$$

**Exercice 28.** Soit  $X$  une variable aléatoire finie à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $\mathbb{E}[X] \mathbb{E}[1/X] \geq 1$ .

**Exercice 29.** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé discret et  $X$  une variable aléatoire réelle. On appelle entropie de  $X$ , notée  $H(X)$ , le réel

$$H(X) = - \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(x) \ln(\mathbb{P}_X(x)) = - \sum p_i \ln(p_i).$$

où  $(p_i)$  est la distribution de la loi de  $X$ . Soit  $n = |X(\Omega)|$ . On convient que  $0 \ln 0 = 0$ .

1. Montrer que  $H(X) = 0$  ssi  $X$  est presque sûrement constante.
2. Montrer que  $H(X) \leq n \ln n$  et caractériser le cas d'égalité.

Le postulat fondamental de la statistique microcanonique énonce que les microétats d'un système thermodynamique isolé sont équiprobables. Ceci confirme la définition de l'entropie de Boltzmann.

## 6. DÉRIVATION

**Exercice 30.** Soit  $a < b$ , et  $h$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On fixe un entier  $N \geq 1$ . On dit que  $h$  s'annule à l'ordre  $N$  dans  $[a, b]$  s'il existe des nombres  $a \leq c_1 < \dots < c_m \leq b$  et des entiers strictement positifs  $k_1, \dots, k_m$  tels que  $\sum_{i=1}^m k_i = N$  et, pour tout entier  $1 \leq i \leq m$  et tout entier  $0 \leq k < k_i$  on a  $h^{(k)}(c_i) = 0$ .

1. Soit  $N \geq 1$  un entier. Montrer que si  $h$  s'annule à l'ordre  $N + 1$  dans  $[a, b]$ , alors  $h'$  s'annule à l'ordre  $N$  dans  $[a, b]$ .
2. Pour tout entier  $N \geq 1$ , montrer que si  $h$  s'annule à l'ordre  $N + 1$  dans  $[a, b]$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $h^{(N)}(c) = 0$ .

## 7. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

**Exercice 31** (Suites de fonctions).   tudier le mode de convergence des suites de fonctions suivantes :

1.  $f_n \in \mathbb{R}_+ : x \mapsto \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$  ;
2.  $f_n \in \mathbb{R}_+ : x \mapsto \frac{x}{n(1 + x^n)}$ .

**Exercice 32** (Séries de fonctions).   tudier le mode de convergence des suites de fonctions suivantes :

$$\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n} ; \quad \sum \frac{1}{n^2 + x^2}$$

**Exercice 33.**   tudier  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}$ .

**Exercice 34.**

1. Montrer que

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

2. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx.$$

**Exercice 35.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t) t^n dt = 0.$$

Montrer que  $f = 0$ .

## 8. SÉRIES ENTIÈRES

**Exercice 36.** Rayon de convergence de :

$$\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}; \quad \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n; \quad \sum \frac{x^n}{n + 3 \sin n}.$$

**Exercice 37.** Calcul de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ .

**Exercice 38** (  quation de Bessel). L'équation de Bessel est

$$xy'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 1. \quad (\text{E})$$

1. Trouver une solution à (E) développable en série entière au voisinage de 0.

2. Montrer que  $J_0(x) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt$  est solution de (E).

**Exercice 39.** Un dérangement est une bijection de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\{1, \dots, n\}$  qui n'a pas de point fixe. On se propose ici d'étudier le nombre de dérangements dans  $\mathfrak{S}_n$ , que l'on notera  $d_n$ .

1. Montrer que  $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$  (c'est de la combinatoire).

2. On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$ . Montrer que le rayon de convergence est  $\geq 1$ .

3. En déduire que  $\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ .

Indication : penser à former un produit de Cauchy.

4. On note  $X_n$  la variable aléatoire qui à une permutation aléatoire de  $\mathfrak{S}_n$  associe son nombre de points fixes. Montrer que  $(X_n)$  converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre 1. En particulier, quelle est son espérance et sa variance ?

**Exercice 40.** On définit la suite des nombres de Catalan par  $C_0 = 1$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$ .

En utilisant la série entière  $f(x) = \sum C_n x^n$ , calculer explicitement  $C_n$ .

## 9. INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES ET CONVERGENCE DOMINÉE

**Exercice 41.**   tudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

- |                                                                                                         |                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $t \mapsto \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}, I = \mathbb{R}^+;$ | h) $t \mapsto \frac{1 - e^t + \alpha \sin t}{t^2}, I = ]0, 1], \alpha \in \mathbb{R};$                               |
| b) $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}}, I = \mathbb{R}_+^*;$                           | i) $t \mapsto \left(\sqrt{t^2 + 1} - t\right)^\alpha, I = \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R};$                    |
| c) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t - t^4}}, I = ]0, 1[;$                                                    | j) $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha + t^\beta}, I = \mathbb{R}_+^*, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2;$                   |
| d) $t \mapsto \frac{1 - \sqrt{t}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}, I = [0, 1[;$                        | k) $t \mapsto t^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right), I = \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R};$                 |
| e) $t \mapsto \cos(\ln t), I = ]0, 1];$                                                                 | l) $t \mapsto \frac{t^\alpha \sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}, I = \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R};$                     |
| f) $t \mapsto \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}, I = ]0, 1]$ puis $I = [1, +\infty[;$                             | m) $t \mapsto \frac{1}{ t^\alpha - 1 ^\beta}, I = ]1, +\infty[, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R};$ |
| g) $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t}, I = [\pi, +\infty[;$                                                  | n) $t \mapsto \frac{\ln t}{t^\alpha}, I = \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R}.$                                    |

**Exercice 42.** Soit  $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[, \mathbb{C})$  de dérivé  $f'$  intégrable.

1. Montrer que la série  $\sum f(n)$  et la suite  $\left(\int_1^n f\right)$  ont même nature.

2. Application à  $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ .

**Exercice 43.** Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + x + \dots + x^n} dx$ .

**Exercice 44.** Calculer  $\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1 - xy} dx dy$ .