

Feuille d'exercices n   1

1. NOMBRES RÉELS

Exercice 1. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non-vides et majorées. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$:

1. en utilisant la définition ;
2. en utilisant des suites.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction injective. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty.$$

Exercice 3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. L'objectif de cet exercice est de montrer que f a un point fixe.

1. On pose $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}$. Montrer que A a une borne inférieure dans $[0, 1]$.
2. Montrer que A possède un minimum m . Que dire de $f(m)$? Conclure.

Exercice 4. En utilisant la caractérisation des intervalles, montrer que :

1. l'intersection de deux intervalles est un intervalle ;
2. l'union de deux intervalles non disjoints est un intervalle.

Exercice 5 (  quation de Cauchy). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Que dire si f est dérivable ?
2. Montrer que f est $\mathbb{Q}$ -linéaire.
3. Montrer que si f est continue, alors f est linéaire.

On peut montrer à l'aide de l'axiome du choix que des solutions non linéaires existent. Elles sont pathologiques : leur graphe est dense dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Soient $x_1 < \dots < x_{13}$ treize nombres réels. Montrer qu'on peut en choisir deux, disons x et y tels que

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

2. SUITES

Exercice 7. Soit (u_n) une suite telle que $\frac{u_n}{1 + u_n} \rightarrow 0$. Montrer que $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 8. Soit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or. Montrer que $d(\varphi^n, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$.

Exercice 9. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \rightarrow \ell$.

Montrer que $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \rightarrow \ell$.

Exercice 10 (« Méthode des α »).   tudier les suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \text{th}(u_n)$.
2. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \frac{1 + 2u_n}{1 + 3u_n}$.

Exercice 11 (Suites définies implicitement).

1. Montrer que $P_n(x) := x^n + x + 1$ a une unique racine α_n dans $]0, 1[$.   tudier la suite (α_n) .
2. Montrer que l'équation $\sin(x) = \frac{1}{x}$ a une unique solution x_n dans l'intervalle $\left[2n\pi, \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$.   tudier la suite $(x_n - 2n\pi)$.

Exercice 12.

1. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ tel que $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la suite $(\cos(n))$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 13.

1. Soit α un nombre irrationnel et $(p_n), (q_n)$ deux suites de nombres irrationnels tels que $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha$.
Montrer que $q_n \rightarrow +\infty$.
2. On définit la fonction de Thomae suivante : pour $x \in \mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{Q}$ avec $x = p/q$ irréductible et $q > 0$, on note $f(x) = 1/q$. Sinon, on pose $f(x) = 0$. Déterminer les points de continuité de f .
3. Déterminer les points de dérivabilité de f .

3. SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 14. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \left(\frac{n^2}{1+n^2} \right)^{1/n}$
2. $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$
3. $\sum \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$
4. $\sum (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$
5. $\sum \sin(\pi \sqrt{n^2+1})$

Exercice 15. Vrai ou faux ? (et réciproque ?)

1. $\sum u_n$ converge $\implies \sum u_n^2$ converge ;
2. $\sum u_n$ converge et à termes positifs $\implies \sum u_n^2$ converge ;
3. $\sum u_n$ converge $\implies u_n \longrightarrow 0$;
4. $u \sim v \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 16.   quivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$?

Exercice 17. Montrer qu'il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Exercice 18. On note (p_n) la suite des nombres premiers. Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{p_n}$.

Indication : Calculer le DL à l'ordre 1 en 0 de $\ln \left(\frac{1}{1-x} \right)$.

4. FAMILLES SOMMABLES

Exercice 19. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)z^n$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n .

Exercice 20. On définit la fonction zêta de Riemann par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ pour $s > 1$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)},$$

où φ est l'indicatrice d'EULER. On rappelle que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Exercice 21. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mu(n)$ comme 0 si n est divisible par le carré d'un nombre premier, et sinon par $(-1)^k$ où k est le nombre de diviseurs premiers de n .

1. Montrer que μ est multiplicative : $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$.
3. Montrer la formule d'inversion suivante : pour $s > 1$, on a

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Exercice 22 (Réarrangements de somme). Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Nature de $\sum \frac{1}{\sigma(n)}$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sigma(n)}$; $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 23. Calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{[\{x\} \text{ppcm}(\lceil x \rceil, \lfloor 1/\{x\} \rfloor)]^2} dx.$$

Exercice 24 (Identité de Wald). Soit N , $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires discrètes et mutuellement indépendantes de même loi. Soit $S = \sum_{i=1}^N X_i$.

On définit la fonction génératrice d'une variable X par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n.$$

1. Montrer que pour $|t| < 1$, $G_S(t) = G_N(G_X(t))$.
2. Montrer que si les variables admettent une espérance, $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.