

Masterclass d'analyse 2026

Examen final

Durée : 4 heures. Calculatrices et documents interdits.

L'examen étant très long, il n'est pas nécessaire de traiter l'intégralité du sujet pour avoir la note maximale. L'examen se déroule en trois temps : des questions de cours, des exercices indépendants, et enfin un problème.

Si un.e candidat.e repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, iel poursuit sa composition en précisant les initiatives qu'iel est amené.e à prendre.

Si le ou la candidat.e rencontre une difficulté lors de la résolution d'une question, iel pourra admettre le résultat dans les questions précédentes (et est incité.e à le faire pour ne pas perdre du temps inutilement !)

Bonne chance à tou.te.s !

Dans tout le sujet, on demandera aux candidat.es
de prêter une attention particulière à la convergence des objets utilisés.

Barème

Exercice 1 – Questions de cours

19 points

□ – 1. Affirmer ou infirmer, avec justification :

- 1 a) Une série $\sum u_n$ converge si, et seulement si $u_n \rightarrow 0$;
- 1 b) Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ aussi ;
- 1 c) Soit (u_n) une suite réelle. Si $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k\right)$ converge, alors (u_n) aussi.

4 □ – 2.   noncer puis démontrer le théorème de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs et en déduire le théorème de Ces  ro.

4 □ – 3.   noncer et démontrer le critère spécial des séries alternées.

3 □ – 4.   noncer et démontrer l'inégalité de Jensen, et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique rappelée ci-dessous : pour tous réels positifs $x_1, \dots, x_n$ on a

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

5 □ – 5. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et pour tout entier n , on définit le n^e polynôme de Bernstein associé à f :

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

En estimant la différence $|f(x) - B_n f(x)|$, énoncer puis démontrer le théorème d'approximation de Weierstrass.

Exercice 2 – Critère de condensation de Cauchy

13 points

Dans cet exercice, on fixe une suite réelle (u_n) décroissante et convergeant vers 0. Soit $p \geq 2$ un entier. On va démontrer le critère de condensation de Cauchy :

$$\sum u_n \text{ et } \sum p^n u_{p^n} \text{ sont de même nature.}$$

2 □ – 6. Démontrer que les séries $\sum p^n u_{p^n}$ et $\sum (p^{n+1} - p^n) u_{p^{n+1}}$ sont de même nature

3 □ – 7. Démontrer que pour tout n , on a

$$(p^{n+1} - p^n) u_{p^{n+1}} \leq \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k \leq (p^{n+1} - p^n) u_{p^n}.$$

- 3 ☐ – 8. Conclure.
- 2 ☐ – 9. Une première application (historique) :
 en prenant $p = 2$, démontrer que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
 C'est une généralisation de la première preuve connue de la divergence de la série harmonique, due à Nicole Oresme en 1360 !
- 3 ☐ – 10. Une seconde application : On note $v_n = \min(u_n, 1/n)$. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Montrer que (v_n) est décroissante, converge vers 0, puis que $\sum v_n$ diverge.

Exercice 3 – Intégrale de Gauss

11 points

- 2 ☐ – 11. Justifier que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
 Dans la suite de cet exercice, on se propose de calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

- ~~☐ – 12.~~ Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

- 2 ☐ – 13. Démontrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.
- 3 ☐ – 14. Prouver que pour tout x réel positif on a : $f(x) = \int_0^1 x e^{-x^2 t^2} dt$.
 En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\frac{\pi}{4}$.
- 2 ☐ – 15. Démontrer que pour tout $x \geq 0$ réel on a : $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$.
- 2 ☐ – 16. En déduire la valeur de I .

Problème (CCINP MP 2019 enrichi)**Introduction**

Dans ce sujet une série de fonctions L_a ^[1] est une série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I - Propriétés**12 points**

Soit une série de fonctions $L_a : \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$.

2 $\square$ – **17.** Si $x \in]-1, 1[$, donner un équivalent de $1 - x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ converge absolument.

Remarque : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1, 1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1, 1[$.

3 $\square$ – **18.** Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans l'intervalle $]-1, 1[$.

3 $\square$ – **19.** On pose, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1, 1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1, 1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

4 $\square$ – **20. Expression sous forme de série entière**

On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right), \text{ où } I_n = \{(k,p) \in A, kp = n\}.$$

Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$ est sommable.

[1]. Du nom de Jean-Henri Lambert (1728-1777)

En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{d|n} a_d$ ($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples 15 points

3 $\square$ – 21. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n . Exprimer, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

4 $\square$ – 22. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n .

Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

On admet que pour $n \geq 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

2 $\square$ – 23. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1, 1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

3 $\square$ – 24. Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}.$$

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question 19.

3 $\square$ – 25. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in]0, 1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$.

Partie III - Questions supplémentaires

25 points

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $\Omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers comptés avec multiplicité. Par exemple, avec $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$, on a $\Omega(600) = 2 + 1 + 2 = 5$. On définit l'entier $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$. La fonction λ ainsi définie est appelée fonction de Liouville.

- 2 ☐ – 26. Démontrer que λ est compl  tement multiplicative : si a et b sont des entiers naturels non nuls, alors $\lambda(ab) = \lambda(a)\lambda(b)$.
- 3 ☐ – 27. Démontrer que la fonction $n \mapsto \sum_{d|n} \lambda(d)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\{n^2, n \geq 1\}$ des carrés des entiers naturels non nuls.
- 3 ☐ – 28. On note $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. Calculer le rayon de convergence de f , puis montrer que l'intervalle ouvert de convergence on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(n) \frac{x^n}{1 - x^n}.$$

- 3 ☐ – 29. Démontrer la formule, pour $s > 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}.$$

Les dernières questions du sujet sont plus délicates et servent à départager les meilleur.es.

- 3 ☐ – 30. Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ a une limite et la calculer.
- 5 ☐ – 31. Pour tout $x \geq 0$, on note $q(x) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i^2 + j^2 \leq x\}$. Déterminer un équivalent de $q(x)$ en $+\infty$.
- 6 ☐ – 32. On reprend la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ de la question 28. Déterminer un équivalent de f au voisinage de 1^- . On pourra commencer par déterminer un équivalent de f^2 .
Toute trace de raisonnement sera valorisée.

Fin du sujet.

20/20 fixé à 50 points