

Devoir maison n   1

   rendre le lundi 25 mai 2026

Ce devoir a pour but de développer des techniques courantes en analyse réelle. Le devoir est très long, il pourra être rendu en partie ou en totalité. Il est constitué de deux exercices théoriques, et d'un problème plus calculatoire.

Le travail pourra être rendu individuellement ou en binôme/trinôme.

Exercice 1 – Lemme de Fekete (d'après CCMP Maths 1 MP 2018)

Soit $u = (u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \{u_k, k \geq n\}$. On définit $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n \geq 1}$ et $\bar{u} = (\bar{u}_n)_{n \geq 1}$ par les formules

$$\underline{u}_n = \inf(U_n) \quad \text{et} \quad \bar{u}_n = \sup(U_n).$$

   – 1. Justifier que $\underline{u}$ et $\bar{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n \geq 1}$ et $w = (w_n)_{n \geq 1}$, on dit que v est **plus petite** que w , et on note $v \preceq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leq w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est **plus grande** que v .

   – 2. Montrer que $\bar{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u . Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u .

Dans toute la suite de l'exercice, on appelle limite inférieure $\varliminf$ et limite supérieure $\varlimsup$ les limites suivantes :

$$\varliminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{u}_n \quad \text{et} \quad \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{u}_n.$$

   – 3. Si $v = (v_n)_{n \geq 1}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u , comparer les limites de $\bar{u}$ et de $\bar{v}$.

   – 4. Montrer que $\bar{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si, et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites u , $\bar{u}$ et $\underline{u}$?

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n \geq 1}$ est **sous-additive** si pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{i+j} \leq u_i + u_j$.

Dans le reste de l'exercice, on ne suppose plus que u est bornée, mais on suppose que u est positive et sous-additive.

   – 5. Soit m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geq 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n . Montrer que

$$u_m \leq (q-1)u_n + u_{n+r}$$

et en déduire l'inégalité

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m}.$$

□ – 6. En déduire que la suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m \geq 1}$ est bornée, puis que pour tout $n \geq 1$,

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}.$$

□ – 7. En conclure que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge.

Exercice 2 – Continuité au sens de Ces  ro

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue au sens de Ces  ro** en $a \in \mathbb{R}$ si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a\right) \implies \left(\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)\right).$$

On dit que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue au sens de Ces  ro sur $\mathbb{R}$ si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue au sens de Ces  ro en tout $a \in \mathbb{R}$. L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions continues au sens de Ces  ro sur $\mathbb{R}$.

□ – 8. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers $a \in \mathbb{R}$.

Prouver que la suite $\left(y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers a .

On dit alors que x **converge en moyenne** vers a .

□ – 9. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et u la suite définie par $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} = x$ et $u_{2p+1} = y$.

Prouver que la suite u converge en moyenne vers $\frac{x+y}{2}$.

□ – 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue en $a \in \mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue au sens de Ces  ro en a ? La réponse sera justifiée.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue au sens de Ces  ro sur $\mathbb{R}$.

□ – 11. On pose $g = f - f(0)$. Prouver que f est continue au sens de Ces  ro sur $\mathbb{R}$ équivaut à g est continue au sens de Ces  ro sur $\mathbb{R}$.

On suppose donc désormais que $f(0) = 0$.

□ – 12. Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$

En déduire que f est additive, c  d que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

□ – 13. Prouver que f est $\mathbb{Q}$ -linéaire, c  d $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.

En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$. Conclure.

Problème

Dans ce problème, on se propose d'étudier les intégrales de Wallis et leurs applications.

Partie préliminaire

Pour tout $n \geq 0$, on note $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta) d\theta$.

□ – 14. Calculer W_0 , W_1 et W_2 .

□ – 15. Montrer que $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta$.

□ – 16. Montrer que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. Que dire des suites (W_n) et (W_{n+2}) ?

□ – 17. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

□ – 18. Montrer que (W_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge et que $W_n \sim W_{n+1}$.

□ – 19. Montrer que $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

En déduire une expression de W_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□ – 20. Déterminer un équivalent de la suite (W_n) .

Première partie

□ – 21. Si on admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

□ – 22. Déterminer sur l'intervalle $] -1, 1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \text{Arcsin } x$.

Application : montrer que

$$\pi = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n(2n+1)} \binom{2n}{n}.$$

   quoi peut servir ce résultat ?

□ – **23.** En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$.

□ – **24.** Justifier que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx.$$

□ – **25.** En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Deuxième partie

□ – **26.** Donner une expression plus simple de $\sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n} x^{2n}$.

Le but de cette partie est de simplifier l'expression $\sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n+1} x^{2n+1}$ que l'on notera $S(x)$.

□ – **27.** Montrer que pour $-1 < x < 1$, on a

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□ – **28.** Montrer que

$$S(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{x \cos \theta}{1 - (x \cos \theta)^2} d\theta$$

puis que

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1 - x^2 + u^2} du.$$

□ – **29.** En déduire une expression de $S(x)$.

□ – **30.** Déterminer le DSE de $x \mapsto (\arcsin x)^2$.

□ – **31.** Montrer que

$$\zeta(2) = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}}.$$

Que dire de la vitesse de convergence ?

□ – **32.** Démontrer les identités suivantes pour $|x| < 1$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + x \sin \theta} = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \arcsin^2 x = - \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 - x^2 \sin^2 \theta)}{\sin \theta} d\theta.$$

Troisième partie

On pose $P_n = \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - 1}$.

   – **33.** Montrer que

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \frac{4^n n!}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{4^n n!}{(2n+1)!}.$$

En déduire que $\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - 1} := \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{\pi}{2}$.

   – **34.** Montrer que la série $\sum (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge et calculer sa somme.

En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x} dx$.

Fin du devoir.



FIGURE 1 – John Wallis (1616–1703)