

Sujet n° 4 - Introduction aux méthodes variationnelles en physique

Question de cours Énoncer les trois lois de Newton. Définir le travail d'une force. Donner la définition d'une force conservative. Démontrer le théorème de l'énergie mécanique.

Exercice (Adapté du problème de physique de l'agrégation de physique de 2016) On considère un système mécanique dont l'état est représenté par un jeu de quantités $(q_i(t))_{1 \leq i \leq N}$. On appelle ces quantités *coordonnées généralisées*. On forme également les dérivées correspondantes $(\dot{q}_i(t))_{1 \leq i \leq N}$, appelées alors *vitesses généralisées*.

On considère une quantité $\mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i)$, appelée *lagrangien*. Entre deux instants t_1 et t_2 , et pour un chemin $q : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$, on définit la quantité S suivante, appelée *action* par

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

1. On ne considère pour simplifier qu'une coordonnée généralisée. On introduit une fonction $\eta : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$.

Expliquer brièvement pourquoi une condition nécessaire pour que l'action S soit extrémale est

$$S[q + \varepsilon] - S[q] \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} o(\varepsilon).$$

Dans toute la suite, on suppose l'action extrémale.

2. Développer $\mathcal{L}(t, q + \varepsilon\eta, \dot{q} + \varepsilon\dot{\eta})$ au premier ordre en ε . Établir l'équation d'EULER-LAGRANGE

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0.$$

On admet que cette expression est toujours vraie pour chaque coordonnée, lorsque le système possède plus d'un degré de liberté.

3. On considère un système conservatif classique. On pose le lagrangien $\mathcal{L} = E_c - E_p$. On admet que le chemin q observé rend l'action extrémale. Retrouver le principe fondamental de la dynamique.
4. On appelle *impulsion généralisée* le réel $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$. On pose également la quantité suivante, appelée *hamiltonien*¹ :

$$H(t, p, q) = p\dot{q} - \mathcal{L}(t, q, \dot{q}).$$

À l'aide de l'équation d'EULER-LAGRANGE, former les dérivées

$$\frac{\partial H}{\partial q} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Ce sont les équations d'HAMILTON.

5. Donner le sens de l'hamiltonien dans le cadre de la question 3.

1. Notez le changement de variables, on parle de transformation de LEGENDRE.

Application : la courbe brachistochrone Le but de ce problème est d'obtenir la forme de la courbe minimisant le temps de parcours par le glissement sans frottement d'un point matériel le long d'une courbe.

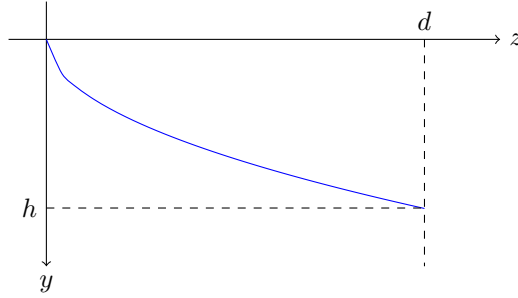


FIGURE 1 – Problème de la courbe brachistochrone

6. Montrer que le système est conservatif, puis exprimer l'énergie mécanique du système.
7. Dans l'expression obtenue, faire apparaître la quantité $y' = \frac{dy}{dz}$, puis exprimer dt en fonction de y, y' et les paramètres du problème.
8. En déduire une quantité $\mathcal{L}(y, y')$ telle que le temps qu'il faut au point matériel pour parcourir la courbe vaut

$$\mathcal{T} = \int_0^d \mathcal{L}(y(z), y'(z)) dz.$$

9. On admet que lorsque le lagrangien est indépendant de la variable d'intégration, il vérifie l'identité de BELTRAMI suivante :

$$\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} = \text{cste}.$$

En déduire que

$$(1 + y'^2)y = D.$$

où D est une constante que l'on ne demande pas de préciser.

Cette équation différentielle non linéaire admet une solution, sous la forme

$$\begin{cases} x(\theta) &= \frac{D}{2}(\theta - \sin \theta) \\ y(\theta) &= \frac{D}{2}(1 - \sin \theta). \end{cases}$$

On appelle *cycloïde* la forme de la solution obtenue.