

Sujet n° 1 - Optique matricielle

Question de cours Rappeler les lois de Snell-Descartes. Rappeler les conditions de Gauss. Qu'est-ce que le stigmatisme ? Quel est le seul système optique rigoureusement stigmatique ? Pour les autres, dans quelles conditions considère-t-on qu'un système est stigmatique ?

Capacité exigible : retrouver le grossissement d'une lunette astronomique.

Exercice Dans tout l'exercice, on se place dans les conditions de Gauss (on dit que les rayons sont paraxiaux).

1. Simplifier les lois de Snell-Descartes à l'ordre 1.

Dans toute la suite, on considère un système optique où se propagent des rayons lumineux selon un axe optique (Ox).

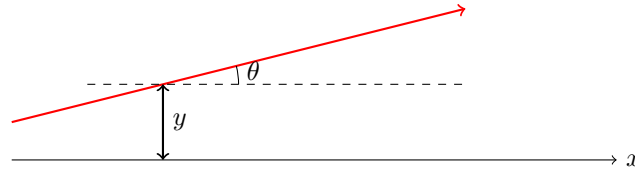


FIGURE 1 – Système optique

2. On représente la position et la direction d'un rayon lumineux par un vecteur colonne $\begin{pmatrix} y \\ n\theta \end{pmatrix}$ où n est l'indice optique du milieu. Donner les matrices qui correspondent à :
 - (a) une translation du rayon lumineux selon une distance d sur l'axe optique ;
 - (b) une réfraction à travers un dioptré plan normal à l'axe optique ;
 - (c) une réflexion à travers un dioptré/miroir plan normal à l'axe optique ;
 - (d) une propagation à travers une lentille mince de distance focale f .
3. Montrer que la matrice d'un miroir sphérique centré de rayon R est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On considère une cavité optique formée de deux miroirs sphériques de rayon R_1, R_2 et séparés d'une distance L . Exprimer la matrice de la transformation puis en déduire une CNS de stabilité de la cavité optique. On introduira les grandeurs $g_1 = 1 - \frac{L}{R_1}$ et $g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}$.
5. Tracer l'ensemble des g_1, g_2 tels que la cavité optique soit stable.

Résultat mathématique (admis) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On note λ_1, λ_2 les racines complexes du polynôme $\chi_m \equiv X^2 - (a+d)X + ad - bc$ (appelé polynôme caractéristique de M). Il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$