

Autour de l'équation de conservation

Valentin Moguérrou

Mardi 4 février

1 Écoulement dans un tuyau

C'est le cadre habituel. Voir le cours de prépa.

2 Généralisation et obtention de l'expression générale de l'équation locale de conservation

Dans cette partie on considère un champ scalaire $\rho : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(M, t) \mapsto \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\rho(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(E)$ et pour tout $M \in E$, $\rho(M, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Physiquement, ρ représente une variable *intensive*. Ainsi, l'élément infinitésimal

$$d^3Q \equiv \rho(M) d^3V \quad (1)$$

est la quantité extensive associée au volume d^3V . La quantité *extensive* associée définie sur un volume V est :

$$Q(t) \equiv \iiint_{M \in V} \rho(M, t) d^3V. \quad (2)$$

On fixe un volume V délimité par une surface $S = \partial V$. On suppose que chaque élément de volume d^3V renferme la quantité extensive $\rho(M, t) d^3V$ (où le volume d^3V est centré en M).

On définit la quantité

$$\Phi \equiv -\frac{dQ}{dt} \quad (3)$$

appelée *flux de Q à travers la surface S* , c'est-à-dire la quantité de Q qui s'échappe du volume V par unité de temps. Or, seuls les éléments de volume situés à la frontière du volume contribuent à l'échappement. À chaque élément de surface d^2S , on associe un élément de flux

$$d\Phi = \vec{j} \cdot d^2\vec{S} \quad (4)$$

où $d^2\vec{S} = d^2S \vec{n}$ ($\vec{n}$ étant le vecteur normal à la surface dirigé vers l'extérieur) et $\vec{j}$ est un vecteur indiquant la direction de l'échappement de Q à travers d^2S . Ce vecteur $\vec{j}$ est appelé *vecteur densité volumique de flux*.

Remarquons qu'on a $[\Phi] = \frac{[Q]}{T}$ et $[\|\vec{j}\|] = \frac{[\Phi]}{L^2} = \frac{[Q]}{TL^2}$.
Puisque ceci est valable selon toute la frontière, on peut écrire :

$$\Phi = \oint_S \vec{j} \cdot d^2\vec{S} \quad (5)$$

Or puisque S est la surface fermée renfermant V , par le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\Phi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} d^3V \quad (6)$$

Or par définition (équation 3) $\Phi = -\frac{dQ}{dt}$, l'équation 2 donne

$$\Phi = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) d^3V \quad (7)$$

Ainsi, en regroupant 6 et 7, on obtient :

$$\forall V \quad \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) + \operatorname{div} \vec{j} d^3V = 0. \quad (8)$$

Et donc, finalement :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) + \operatorname{div} \vec{j} = 0.} \quad (9)$$

Remarque : le vecteur $\vec{j}$ étant bien défini à la frontière de tout volume, il est bien défini partout.

C'est l'**équation locale de conservation** de Q .

Applications physiques Ce raisonnement, très général et menant à une EDP linéaire du premier ordre peut être appliqué à toutes sortes de situations, voir Table 1.

3 Spécialisations

Régime permanent En régime permanent, par définition on a $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ donc l'équation de conservation se réduit à

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (10)$$

On dit alors que le champ de vecteurs $\vec{j}$ est à **flux conservatif**. En effet, par le théorème de Green-Ostrogradski, pour toute surface S , on obtient

$$\Phi = \oint_S \vec{j} \cdot d^2\vec{S} = 0 \quad (11)$$

Autrement dit :

$$\Phi_{\text{entrant}} = \Phi_{\text{sortant}} \quad (12)$$

Grandeur extensive	Grandeur intensive	Flux	Vecteur densité volumique
volume	proportion en volume	débit volumique	vitesse
masse	masse volumique	débit massique	quantité de mouvement volumique
charge	densité volumique de charge	courant électrique	densité de courant
quantité de matière	densité volumique de particules	débit molaire	densité volumique de flux de particules
énergie	densité volumique d'énergie	puissance	densité volumique de flux d'énergie
énergie électromagnétique (u_{em})	densité volumique d'énergie EM	puissance rayonnée	Vecteur de Poynting
énergie interne	densité volumique d'énergie ($= cT$)	puissance thermique	densité volumique de flux thermique

TABLE 1 – Table d'analogie pour l'équation locale de conservation

Vecteur densité volumique de flux à circulation conservative On suppose cette fois-ci que $\vec{j}$ est à **circulation conservative**. Cela signifie que pour tout contour Γ fermé, on a

$$\oint_{\Gamma} \vec{j} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (13)$$

L'analyse vectorielle montre que cette condition est équivalente à

(i)

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{j}) = \vec{0}$$

(ii) Il existe un champ scalaire V appelé potentiel tel que

$$\vec{j} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad (14)$$

Dans ce cas, en injectant 14 dans 9 on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} V \right) = 0 \quad (15)$$

Autrement dit

$$\Delta V = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (16)$$

C'est l'équation de Poisson.

Si, en plus, on est en régime stationnaire alors

$$\Delta V = 0 \quad (17)$$

C'est l'équation de Laplace. On dit que le potentiel V est harmonique.