

Analyse dimensionnelle

Décembre 2023

Valentin Mogu  rou

Dimensions

Définition

Soit I un ensemble non vide. On appelle $\mathbb{R}$ -espace dimensionnel l'ensemble $D = \mathbb{R}^I$. On munit l'ensemble D du produit défini par :

$$\forall J \subset I \quad \forall A \in D^I \quad \prod_{j \in J} A_j = \left(\sum_{j \in J} A_{i_j} \right)_{i \in I}$$

et de l'exponentiation dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \alpha \in D \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \alpha^\lambda = (\lambda \alpha)_{i \in I}.$$

Proposition

L'ensemble D muni du produit et de l'exponentiation, D a une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Il est isomorphe à $(\mathbb{R}^I, +, \cdot)$.

Notation

Pour tout $i \in I$, on note $X_i = (\delta_{i,j})_{j \in I}$. On a donc

$$\forall \alpha \in D \quad \alpha = \prod_{i \in I} X_i^{\alpha_i}.$$

On pr  f  rera cette dernière notation dans la suite du document. La dimension $1_D = (0)_{i \in I}$ est appelée constante. On appelle dimensions les éléments de $D \setminus \{1\}$. On appelle dimensions élémentaires les éléments de la famille $(X_i)_{i \in I}$.

Grandeurs

Définition

Soit $S = \mathbb{K} \times D$, dont les éléments sont appelés grandeurs scalaires, et $V = \mathbb{K}^n \times D$, dont les éléments sont appelés grandeurs vectorielles.

On identifie tous les éléments de la forme $(0, A) \in S$ à 0 (resp. $(\vec{0}, A) \in V$ à $\vec{0}$). On dit que 0 et $\vec{0}$ sont sans dimension. Par convention on note $[0] = 1_D$.

Soit $x = (\lambda, A) \in S^*$ (resp. $\vec{x} = (\vec{u}, A) \in V^*$). On note $[x] = A$ (resp. $[\vec{x}] = A$) et on dit que A est la dimension de x (resp. $\vec{u}$). On dit que λ (resp. $\vec{u}$) est le scalaire adimensionné associé à λ (resp. vecteur adimensionné associé à $\vec{x}$) et l'on note $\hat{x} = \lambda$ (resp. $\hat{\vec{x}} = \vec{u}$).

Remarque

Soit $(a, b) \in (S^*)^2$ (resp. $(V^*)^2$). La contraposée de l'implication (vraie) $a = b \Rightarrow [a] = [b]$ est $[a] \neq [b] \Rightarrow a \neq b$. Autrement dit, une formule inhomogène est nécessairement fautive.

Dans le cas où a et b sont scalaires (resp. vecteurs adimensionnellement colinéaires), si $[a] = [b]$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $a = \lambda b$.

Définition

On définit la loi de composition interne *non partout définie* $+$ sur S (resp. V) par

$$\forall (a, b) \in S \text{ (resp. } V) \quad [a] = [b] \Rightarrow a + b = (\hat{a} + \hat{b}, [a])$$

Définition

On définit la loi de composition interne $\times$ sur S par

$$\forall (a, b) \in S^2 \quad ab = (\hat{a}\hat{b}, [a][b])$$

Définition

On définit la relation d'ordre $\leq$ sur $S_{\mathbb{R}}$ par

$$\forall (a, b) \in S_{\mathbb{R}}^2 \quad a \leq b \iff [a] = [b] \wedge \hat{a} \leq \hat{b}$$

Autrement dit, seules les grandeurs homogènes réelles sont comparables.

Définition

Soit $x \in S_{\mathbb{R}_+^*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $x^\alpha = ((\hat{x})^\alpha, [x]^\alpha)$.

Définition

Soit $x \in S$ et $\vec{u} \in V$. On définit le module de x par

$$|x| = (|\hat{x}|, [x])$$

et la norme de $\vec{u}$ par

$$\|\vec{u}\| = (\|\hat{u}\|, [\vec{u}])$$

Définition

Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire de $\mathbb{K}^I$. On appelle produit scalaire dimensionné associé à $(\cdot | \cdot)$ l'application

$$\begin{aligned} (\cdot | \cdot) : V^2 &\rightarrow S \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto ((\hat{x} | \hat{y}), [\vec{x}] \times [\vec{y}]). \end{aligned}$$

Application

On prend $I = \llbracket 1, 7 \rrbracket$ et on note L, M, T, I, Θ, N, J les dimensions élémentaires de D . On a alors

$$D = \{L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\eta \Theta^\varepsilon N^\delta J^\zeta : (\alpha, \beta, \gamma, \eta, \varepsilon, \delta, \zeta) \in \mathbb{K}^7\}$$

On a alors, par construction,

$$\forall x \in S^* \exists! (\alpha, \beta, \gamma, \eta, \varepsilon, \delta, \zeta) \in \mathbb{K}^7 \quad [x] = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\eta \Theta^\varepsilon N^\delta J^\zeta.$$

De même pour les grandeurs vectorielles.

Une unité est une grandeur scalaire $\neq 0$ qui correspond par convention à une grandeur physique mesurable (toute unité du système international est définie à partir de constantes physiques dimensionnées).

Soit G une grandeur. La composante $\hat{G}$ définie plus tôt étant arbitraire, on doit exprimer G en fonction d'une unité. Soit u une grandeur $\neq 0$ telle que $[u] = [G]$ (et colinéaire à G si G est vectorielle). Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $G = \lambda u$.

Exemple : $c = \underbrace{299\,792\,458}_{\text{préfacteur } \lambda} \underbrace{\text{ms}^{-1}}_{\text{unité } u}$ où $(\text{m}, \text{s}) \in (D^*)^2$, $[\text{m}] = L$ et $[\text{s}] = T$.