

Calcul de la longueur d'une spirale (d'après CCS φ_1 MPI q_{39})

Valentin Mogu  rou

30 avril 2025

Le sillon peut être assimilé à une spirale d'Archimède dont l'équation est

$$r(\theta) = \frac{e}{2\pi}\theta, \quad \theta \in [0, \omega\Delta t].$$

Ici, on choisit un déphasage nul, mais il suffit de calculer une différence dans le cas contraire. La longueur de la spirale est donc donnée par

$$L = \int_0^{\omega\Delta t} d\ell \tag{1}$$

$$= \int_0^{\omega\Delta t} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} \tag{2}$$

$$= \int_0^{\omega\Delta t} \sqrt{\left(\frac{e}{2\pi}d\theta\right)^2 + \left(\frac{e}{2\pi}\theta\right)^2 d\theta^2} \tag{3}$$

$$= \frac{e}{2\pi} \int_0^{\omega\Delta t} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta \tag{4}$$

On pose le changement de variable $\theta = \text{sh } u$.

$$L = \frac{e}{2\pi} \int_0^{\text{argsh}(\omega\Delta t)} \sqrt{1 + (\text{sh } u)^2} \text{ch } u du \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

On a la relation de trigonométrie hyperbolique $\text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u = 1$, d'où

$$L = \frac{e}{2\pi} \int_0^{\text{argsh}(\omega\Delta t)} \text{ch}^2 u du \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Et on a

$$\text{ch}^2 u = \frac{1 + \text{ch}(2u)}{2}$$

d'où

$$L = \frac{e}{4\pi}(\operatorname{argsh}(\omega\Delta t)) + \frac{e}{8\pi}(\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh}(\omega\Delta t))) \quad (9)$$

Enfin, puisque $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} u) = 2x\sqrt{1+x^2}$

$$L(\Delta t) = \frac{e}{4\pi} \left[(\operatorname{argsh}(\omega\Delta t)) + \omega\Delta t\sqrt{1+(\omega\Delta t)^2} \right] \quad (10)$$

On peut poser $p = \frac{\omega\Delta t}{2\pi}$ (nombre de tours) et on retrouve

$$L(p) = \frac{e}{2}\sqrt{1+(2\pi p)^2} + \frac{e}{4\pi}\operatorname{argsh}(2\pi p) \quad (11)$$

$$L(p) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \pi e p^2. \quad (12)$$

Pour comparer, la longueur de p cercles concentriques, où $p \in \mathbb{N}$ est donnée par

$$L_0(p) = \sum_{k=1}^p 2\pi(ke) = \pi e p(p+1) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \pi e p^2 \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} L(p). \quad (13)$$

Autre méthode de calcul On pose

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1+\theta^2} d\theta \quad (14)$$

$$= \left[\theta\sqrt{1+\theta^2} \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta \quad (15)$$

$$= \alpha\sqrt{1+\alpha^2} - \int_0^\alpha \frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta \quad (16)$$

De plus

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1+\theta^2} d\theta \quad (17)$$

$$= \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta + \int_0^\alpha \frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta \quad (18)$$

$$= [\operatorname{argsh} \theta]_0^\alpha + \int_0^\alpha \frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta \quad (19)$$

$$= \operatorname{argsh} \alpha + \int_0^\alpha \frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta \quad (20)$$

et donc, par somme :

$$I = \frac{1}{2} \left(\operatorname{argsh} \alpha + \alpha\sqrt{1+\alpha^2} \right) \quad (21)$$