

Oral X Force centrale

Valentin Mogu rou

13 novembre 2024

 nonc  Un point matériel M subit une force $\vec{F} = \frac{mk}{OM^4} \overrightarrow{OM}$ avec $\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{u}_\theta$ et $\overrightarrow{OM}(t=0) = a \vec{u}_x$ ($k, a, v_0 > 0$). Décrire la trajectoire.

Considérons le système {point matériel} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

On remarque que $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$ avec $E_p = \frac{mk}{2r^2}$. Le champ de force est donc conservatif puisqu'il dérive d'un potentiel.

De plus comme $\vec{F} \propto \vec{u}_r$, $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = 0$ puis par TMC $\mathcal{L}_z = r^2 \dot{\theta} = C = av_0$ (constante des aires).

Puisque le système est conservatif, l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement. On écrit donc

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{mk}{2r^2} = \text{cste} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{mk}{2a^2} \quad (1)$$

Après multiplication par r^2 et simplification on obtient

$$r^2 \dot{r}^2 + r^4 \dot{\theta}^2 + k = (r\dot{r})^2 + C^2 + k = r^2 v_0^2 + \frac{kr^2}{a^2} \quad (2)$$

En dérivant

$$2(\dot{r}^2 + r\ddot{r})(r\dot{r}) = 2r\dot{r}v_0^2 + 2r\dot{r}\frac{k}{a^2} \quad (3)$$

En simplifiant

$$\dot{r}^2 + r\ddot{r} = v_0^2 + \frac{k}{a^2} \quad (4)$$

On reconnaît $\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) = \dot{r}^2 + r\ddot{r}$, d'où

$$r^2 = \left(v_0^2 + \frac{k}{a^2} \right) t^2 + k_1 t + k_2 \quad (5)$$

Or $r(t=0) = a$ et $\dot{r}(t=0) = 0$, d'où $k_1 = 0$ et $k_2 = a^2$ puis

$$r = \sqrt{\left(v_0^2 + \frac{k}{a^2} \right) t^2 + a^2} = \sqrt{(Vt)^2 + a^2} \quad \text{avec} \quad V = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{a^2}} \quad (6)$$

Remarque : On peut voir que V correspond à la vitesse du mobile à l'infini. En effet

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2}{m} (E_m - E_p)} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{mk}{2a^2} - \frac{mk}{2r^2} \right)} \\ v &= \sqrt{v_0^2 + k \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right)} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} V = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{a^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

Maintenant cherchons l'expression de θ . On utilise la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta} = av_0$.

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \frac{C}{(Vt)^2 + a^2} \quad (8)$$

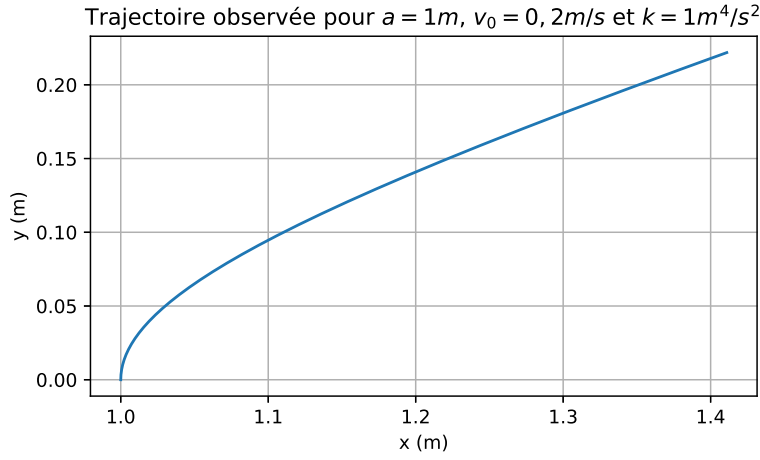


FIG. 1 – Représentation de la trajectoire

On a donc

$$\theta(t_0) - \theta_0 = \int_0^{t_0} \frac{C}{(Vt)^2 + a^2} dt = \frac{C}{a^2} \int_0^{t_0} \frac{1}{1 + (\frac{Vt}{a})^2} dt \quad (9)$$

On pose $u = \frac{Vt}{a}$, donc $du = \frac{V}{a} dt$, donc $dt = \frac{a}{V} du$, et puisque $\theta_0 = 0$,

$$\theta(t) = \frac{C}{a^2} \frac{a}{V} \int_0^{\frac{Vt}{a}} \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{v_0}{V} \arctan\left(\frac{Vt}{a}\right) \quad (10)$$

Quand $t \rightarrow +\infty$, on a les équivalents suivants : $r \sim Vt$ et $\theta \sim \frac{v_0}{V} \frac{\pi}{2}$

La formule est cohérente, puisque si $k = 0$ (absence de force), on a $V = v_0$ et on retrouve $x = a$, $y = v_0 t$.

$$\boxed{\begin{cases} r(t) &= \sqrt{(Vt)^2 + a^2} \\ \theta(t) &= \frac{v_0}{V} \arctan\left(\frac{Vt}{a}\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad V = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{a^2}}}$$

Obtenons maintenant l'équation de la trajectoire. On a

$$\tan\left(\frac{V}{v_0}\theta\right) = \frac{Vt}{a} \quad (11)$$

D'où

$$r(\theta) = \sqrt{a^2 \tan^2\left(\frac{V}{v_0}\theta\right) + a^2} = a \sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{V}{v_0}\theta\right)} = \frac{a}{\cos\left(\frac{V}{v_0}\theta\right)} \quad (12)$$

On obtient donc l'équation de la trajectoire

$$\boxed{r(\theta) = \frac{a}{\cos\left(\frac{V}{v_0}\theta\right)}} \quad (13)$$

Complément : une méthode pour obtenir directement l'équation de la trajectoire

On reprend l'équation 2, à savoir

$$(r\dot{r})^2 + C^2 + k = r^2 V^2 \quad (14)$$

On réécrit $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ et on fait apparaître la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$ pour éliminer la dépendance en $\dot{\theta}$.

$$r^2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \frac{C^2}{r^4} + C^2 + k = r^2 V^2 \quad (15)$$

Puis, en posant $u = \frac{1}{r}$, on peut écrire

$$\frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 C^2 u^2 + C^2 + k = \frac{V^2}{u^2} \quad (16)$$

donc

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{C^2 + k}{C^2} u^2 = \frac{V^2}{C^2} \quad (17)$$

En dérivant (et en notant $u' = \frac{du}{d\theta}$) et en écrivant $\frac{C^2 + k}{C^2} = \left(\frac{V}{v_0} \right)^2$:

$$2u'u'' + 2 \left(\frac{V}{v_0} \right)^2 u u' = 0 \quad (18)$$

puis

$$u'' + \left(\frac{V}{v_0} \right)^2 u = 0 \quad (\text{OH!!}) \quad (19)$$

$$u(\theta) = \lambda \cos \left(\frac{V}{v_0} \theta + \varphi_0 \right) \quad (20)$$

Or les conditions initiales donnent $u(0) = \frac{1}{a}$ et $u'(0) = 0$, donc

$$u(\theta) = \frac{1}{a} \cos \left(\frac{V}{v_0} \theta \right) \quad (21)$$

Puis, comme $r = \frac{1}{u}$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{a}{\cos \left(\frac{V}{v_0} \theta \right)}} \quad (22)$$